On Positive Solutions of Singular Emden-Fowler Type Equations(Evolution Equations and Applications to Nonlinear Problems)

宇佐美, 広介

数理解析研究所講究録
755巻 1991年 48-60

On Positive Solutions of Singular Emden-Fowler Type Equations

広島大総合科　宇佐美広介 (Hiroyuki Usami)

§.0　序

ここでは次のタイプの特異常微分方程式の正値減衰解について考える:

$$y'' = a(t)y^{-\lambda}, \qquad t \geq t_0, \tag{1}$$

ただし $\lambda > 0$, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする。正値関数 $y \in C^2[t_0, \infty)$ が方程式(1)の正値減衰解であるとは y が $t \geq t_0$ で (1)の解であり、かつ漸近条件

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$$

を満たす時と定める。

係数関数 $a(t)$ は常に次の条件を満たすものとする:

(A_1) $a \in C[t_0, \infty) \cap L^1[t_0, \infty)$, かつその support は非有界;

(A_2) $\displaystyle A(t) \equiv \int_t^\infty a(s)\,ds, \qquad t \geq t_0,$

で定義される関数 A は $[t_0,\infty)$ 上非負：$A(t)\geqq 0,\quad t\geqq t_0$ ∎

(1)のタイプの方程式に対しては過去いくらかの結果がある[2, 3, 4, 5]。[5]では $a(t)\leqq 0$ の場合が扱われている。また[4]では $a(t)\geqq 0$ の場合が扱われておりそこでは方程式(1)が

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\text{const}\in(0,\infty),\quad \lim_{t\to\infty} y(t)/t=\text{const}\in(0,\infty),$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t)/t=\infty$$

となるような正値解 y を持つための条件等が考察されている。しかしその他の挙動を示す解―たとえば正値減衰解―についてはまだ何も知られてはいない。我々はこの点に着目して以下正値減衰解について考察を行う。

本稿の内容は２つの部分に分けられる。まず§1で一種の shooting method を用いて(1)の正値減衰解が存在するための十分条件を導く。そして§2では正値減衰解の一意性について考える。

§.1　正値減衰解の存在

まず次の存在定理が得られる：

定理 1

$$\int^{\infty} A(t)\,dt<\infty \tag{2}$$

かつ

$$\int^{\infty} t|a(t)|\left(\int_t^{\infty} A(s)ds\right)^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} dt < \infty \tag{3}$$

ならば方程式(1)は正値減衰解を持つ。■

この定理（それと後述の定理２）の証明には次の補題が必要である：

<u>補題</u>

$$\int^{\infty} A(t)dt < \infty \text{ かつ } \int^{\infty} t[A(t)]^2 dt < \infty \tag{4}$$

ならば任意の $\ell > 0$ に対して(1)の正値解 y で

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \ell, \qquad \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0 \tag{5}$$

かつ $y'(t) < 0$, $t \geqq t_0$, を満たすものが存在する。

<u>補題の略証</u>　$y \in C^2[t_0, \infty)$ が(5)をみたす(1)の正値解となるための必要十分条件は y が積分方程式

$$y(t) = \ell + \int_t^{\infty}\left(\int_s^{\infty} a(r)[y(r)]^{-\lambda} dr\right) ds, \tag{6}$$

$t \geqq t_0$, を満たす事である。仮定(A_2)を使うと(6)は次の積分微分方程式に同値であることがわかる：

$$y(t) = \ell + \int_t^{\infty} A(s)[y(s)]^{-\lambda} ds$$
$$-\lambda \int_t^{\infty}\left(\int_s^{\infty} A(r)[y(r)]^{-\lambda-1} y'(r) dr\right) ds。 \tag{7}$$

積分条件(4)とFréchet空間における不動点定理を用いると(7)は十分大なる $T \geqq t_0$ に対して $y'(t)<0,\ t \geqq T,$ となる $[T,\infty)$ 上の正値解 y を持つことがいえる。そしてこの y を方程式(1)の解として $t=t_0$ まで $y'(t)<0,\ t \geqq t_0,$ のまま延長することが可能である。この $y \in C^2[t_0,\infty)$ が求めるべき正値解である。■

<u>定理1の略証</u>　まず(2), (3)から(4)が従うことに注意する。よって $\ell = 1/n,\ n \in \mathbb{N},$ として補題を使うと(1)の正値解の列 $\{y_n\} \subset C^2[t_0,\infty)$ で次の様なものの存在がいえる：

$$y_n'(t)<0,\ t \geqq t_0;\quad y_n(t) \to \frac{1}{n},\quad y_n'(t) \to 0,\ (t \to \infty); \tag{8}$$

$$y_n(t) = \frac{1}{n} + \int_t^\infty \left(\int_s^\infty a(r)\,[y_n(r)]^{-\lambda} dr \right) ds \tag{9}$$

$$= \frac{1}{n} + \int_t^\infty A(s)\,[y_n(s)]^{-\lambda} ds - \lambda \int_t^\infty \left(\int_s^\infty A(r)\,[y_n(r)]^{-\lambda} y_n'(r)\, dr \right) ds,\quad t \geqq t_0\ 。 \tag{10}$$

(8), (9), (10)より $y_n,\ n \in \mathbb{N}$ に対して次の評価が得られる：

$$y_n(t) \geqq \left(\int_t^\infty A(s)\,ds \right)^{\frac{1}{\lambda+1}},\quad t \geqq t_0; \tag{11}$$

$$y_n(t) \leqq 1 + \int_t^\infty s|a(s)| \left(\int_s^\infty A(r)\,dr \right)^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} ds,\quad t \geqq t_0;$$

$$|y_n'(t)| \leqq \int_t^\infty a(s)\left(\int_s^\infty A(r)dr\right)^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} ds, \qquad t \geqq t_0 \text{ 。}$$

これよりAscoli-Arzelàの定理を用いると$\{y_n\}$の部分列$\{y_{n_i}\}$で ある$\tilde{y} \in C[t_0,\infty)$に$[t_0,\infty)$の各コンパクト区間上一様収束するものの存在がわかる。(11)より勿論$\tilde{y}(t)>0$, $t \geqq t_0$ 。そして(9)でnをn_iとおき代えて$n_i \to \infty$とすると有界収束定理より

$$\tilde{y}(t) = \int_t^\infty \left(\int_s^\infty a(r)\,[\tilde{y}(r)]^{-\lambda} dr\right) ds, \qquad t \geqq t_0,$$

を得てこの$\tilde{y}$が求めるべき正値減衰解であることがわかる。■

例1　方程式(1)で$a(t)$がある$C_1, C_2>0$; $\alpha, \beta>0$に対して

$$C_1 t^{-2-\alpha} \leqq a(t) \leqq C_2 t^{-2-\beta}, \qquad t:\text{十分大}, \tag{12}$$

あるいは

$$C_1 e^{-\alpha t} \leqq a(t) \leqq C_2 e^{-\beta t}, \qquad t:\text{十分大},$$

を満たす場合を見てみよう。いずれの場合も

$$0 < \beta \leqq \alpha < \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\beta$$

となれば定理1の仮定の成立することがわかり、従ってこの時(1)は少くともひとつは正値減衰解を持つ。実際、特異Emden-Fowler方程式

$$y'' = t^{-2-\alpha} y^{-\lambda}, \qquad t \geqq 1, \quad \alpha > 0; \tag{13}$$

および

$$y'' = e^{-\alpha t} y^{-\lambda}, \qquad t \geqq 1, \quad \alpha > 0, \tag{14}$$

は各々

$$\left[\frac{(\lambda+1)^2}{\alpha(\alpha+\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda+1}} t^{-\frac{\alpha}{\lambda+1}}, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\lambda+1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\lambda+1}} e^{-\frac{\alpha}{\lambda+1}t}, \tag{16}$$

という正値減衰解を持っている。

例２　$a(t)$ が振動する場合をとり上げてみよう。

$$a(t) = -\left(\frac{1+\sin t}{t^{2+\varepsilon}}\right)', \quad t \geqq 1; \quad \varepsilon > \lambda,$$

の時を考える。容易にわかるように $t \to \infty$ の時

$$a(t) = O(t^{-2-\varepsilon}); \quad \text{かつ}$$

$$\int_t^\infty A(s)ds = \frac{t^{-1-\varepsilon}}{1+\varepsilon} + O(t^{-2-\varepsilon}) \geqq C t^{-1-\varepsilon}, \quad (\text{ある } C > 0),$$

なので、やはり定理１を使うことができる。∎

$a(t) \geqq 0$, かつ $0 < \lambda < 1$ の時には定理１を改良することができる：

定理２　$a(t) \geqq 0$, $t \geqq t_0$, かつ $0 < \lambda < 1$ とする。この時、次を満たす非増加関数 $a^* \in C[t_0, \infty)$ が存在すれば方程式(1)は

正値減衰解を持つ：

$$a(t) \leqq a^*(t), \qquad t \geqq t_0 ;$$

$$\int_{t_0}^{\infty} [a^*(t)]^{1/2} dt < \infty \tag{17}$$

<u>略証</u>　仮定(17)から $\int^{\infty} t a^*(t) dt < \infty$，つまり $\int^{\infty} t a(t) dt < \infty$ となることに注意する。よって補題が使えて、定理1の証明文中で用いたのと同じ正値解の列 $\{y_n\} \subset C^2[t_0, \infty)$ が得られる。今度はこの $\{y_n\}$ に対して次の評価式の成立が示される：

$$[y_n(t)]^{\frac{\lambda+1}{2}} \leqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\lambda+1}{2}} + \frac{\lambda+1}{2}\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{1/2} \int_t^{\infty} [a^*(s)]^{1/2} ds, \quad t \geqq t_0 ; \tag{18}$$

$$[y_n'(t)]^2 \leqq \frac{2}{1-\lambda} a^*(t) [y_n(t)]^{1-\lambda}, \quad t \geqq t_0 。 \tag{19}$$

(18), (19) および方程式(1)を用いると $[t_0, \infty)$ の任意有界閉区間上での $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$, $\{y_n''\}$ の一様有界性，及び $\{y_n''\}$ の同程度連続性がわかるのである部分列 $\{y_{n_i}\} \subset \{y_n\}$ と $\tilde{y} \in C^2[t_0, \infty)$ とが存在して $y_{n_i} \to \tilde{y}$ (C^2 の位相で広義一様に)がいえる。勿論(11)より $\tilde{y}(t) > 0$, $t \geqq t_0$, であり、また $\tilde{y}$ は方程式(1)の解である。更に(18)で $n = n_i$ と書き換えて $n_i \to \infty$ とすると

$$[\tilde{y}(t)]^{\frac{\lambda+1}{2}} \leqq \frac{\lambda+1}{2}\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{1/2} \int_t^{\infty} [a^*(s)]^{1/2} ds, \qquad t \geqq t_0,$$

からわかる様に $\tilde{y}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ である。つまりこの $\tilde{y}$ は方程

式(1)の正値減衰解である。

例3　定理2を用いて$0<\lambda<1$の時には例1を改良することができる。(12)の右辺，則ち

$$0 \leqq a(t) \leqq C_2 t^{-2-\beta}, \qquad t:\text{十分大},$$

を満たす$C_2, \beta>0$が存在すれば方程式(1)は少くともひとつは正値減衰解を持つことがわかる。

§.2　正値減衰解の一意性

次に方程式(1)の正値減衰解の一意性について考えてみよう。この問題は極めてデリケートに思えるので$a(t) \geqq 0$として考える。まず、次のことがわかる：

定理3　$a(t) \geqq 0,\ t \geqq t_0$，かつ(2)とする。線形方程式

$$w'' + \frac{\lambda}{\lambda+1} a(t) \left(\int_t^\infty A(s)\,ds \right)^{-1} w = 0, \quad t \geqq t_0,$$

が非振動ならば方程式(1)の正値減衰解は一意。特に

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} t^2 a(t) \left(\int_t^\infty A(s)\,ds \right)^{-1} \leqq \frac{1}{4}, \qquad t:\text{十分大},$$

ならば方程式(1)の正値減衰解は一意。

略証　易しい計算により(1)の任意の正値減衰解yは評価

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}\left[y(t)\right]^{\lambda+1} \geqq \int_t^{\infty} A(s)\,ds, \qquad t \geqq t_0, \tag{20}$$

を満たすことがわかる（従って実は自動的に(2)が成立している）。さて、y_1, y_2を方程式(1)の正値減衰解とする。今、tが十分大きい所で$y_1(t) \geqq y_2(t)$ — たとえば$t \geqq t_1 \geqq t_0$ — となっている時を考えてみる。§1で見たように

$$y_i(t) = \int_t^{\infty}\left(\int_s^{\infty} a(r)\left[y_i(r)\right]^{-\lambda} dr\right) ds, \quad t \geqq t_0, \quad i = 1, 2,$$

なので逆に$y_1(t) \leqq y_2(t)$, $t \geqq t_1$, がわかる。つまり$y_1(t) \equiv y_2(t)$, $t \geqq t_1$, 従って$y_1'(t) \equiv y_2'(t)$, $t \geqq t_1$, となる。有限区間$[t_0, t_1]$上では勿論初期値問題の解に対する一意性が成立するので$y_1(t) \equiv y_2(t)$, $t \geqq t_0$, となる。

上のことにより、我々の仮定のもとでは$w(t) \equiv y_1(t) - y_2(t)$が$\infty$のある近傍では決して符号を変えないことを示せば十分である。そこで、そうではないとしてみよう。容易にわかるようにwは線形方程式

$$w'' + c(t)\,w = 0, \qquad t \geqq t_0\,; \qquad \text{ただし}$$

$$c(t) = \begin{cases} a(t)\,\dfrac{\left[y_2(t)\right]^{-\lambda} - \left[y_1(t)\right]^{-\lambda}}{y_1(t) - y_2(t)} & (y_1(t) \neq y_2(t)\ \text{の時}) \\ \lambda\, a(t)\left[y_1(t)\right]^{-\lambda-1} & (y_1(t) = y_2(t)\ \text{の時}) \end{cases}$$

の解である。そして冒頭で示した(20)を使うと

$$C(t) \leqq \frac{\lambda}{\lambda+1}\, a(t)\left(\int_t^{\infty} A(s)\,ds\right)^{-1}, \qquad t \geqq t_0,$$

となるのでSturmの比較定理によると仮定からwは∞の近傍で非振動となる。これは矛盾である。

後半はよく知られたKneserの判定法からの直接な帰結である。■

この定理を特異Emden-Fowler方程式(13)に適応すると

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}\,\alpha(\alpha+1) \leqq \frac{1}{4}$$

の時に正値減衰解は一意でそれは(15)で与えられることがわかる。しかしもうひとつの方程式(14)に対しては適応できない……。我々にはこれらの具体的な方程式(13),(14)の正値減衰解はひとつしかないように思える；実際Bellman [1]で使われた論法を用いて次のことが示せる：

定理４　特異Emden-Fowler方程式(13),及び(14)の正値減衰解はただひとつでそれらは各々(15),及び(16)で与えられる。

略証　(i) 方程式(13)について。関数(15)はもちろん(13)の正値減衰解であるがこれを$y_1(t)$と書くことにする。$y \in C^2[t_0,\infty)$を(13)の正値減衰解として$y(t) \equiv y_1(t)$, $t \geqq t_0$,を示せばよい。定理３の証明の冒頭で示したようにこのyは(20)

を満たす。今の場合これはある $\delta>0$ に対して

$$y(t) \geqq \delta y_1(t), \qquad t \geqq 1, \tag{21}$$

となることを意味している。$v(t) \equiv y(t)/y_1(t)$ という変換を施すと方程式(13)は

$$v'' - \frac{2\alpha}{1+\lambda}\cdot\frac{v'}{t} + \left[\frac{\alpha(\alpha+\lambda+1)}{(1+\lambda)^2}\right]\cdot\frac{1}{t^2}\cdot(v - v^{-\lambda}) = 0, \quad t \geqq 1,$$

となることがわかる。これを簡単のため

$$v'' - \frac{p}{t}v' + \frac{q}{t^2}(v - v^{-\lambda}) = 0, \qquad t \geqq 1,$$

$(p, q>0)$ と書くことにする。更に変数変換 $t = e^s$ を施すと

$$\ddot{v} - p\dot{v} + q(v - v^{-\lambda}) = 0, \qquad s \geqq 0, \tag{22}$$

にうつる。ここに $\cdot = d/ds$ である。

定理3の証明ですでに述べたように $t=\infty$ のある近傍で y_1 と y とに大小関係が存在すれば $y_1 \equiv y$ がすぐにわかるので $y_1(t) - y(t)$ が $t=\infty$ の近傍で無限回符号を変えると仮定して矛盾を導けば証明は終る。これは $v(s)$ についていえば v が 1 のまわりを振動していることを意味する。$\{\sigma_i\}$ を $v(s)-1$ のとなりあう零点の列とし s_i を区間 (σ_i, σ_{i+1}) に存在する $\dot{v}(s)$ の唯一の零点とし更に $v_i = v(s_i)$ とおく。(22)を

$$\left(\frac{\dot{v}^2}{2}\right)^{\cdot} - p\dot{v}^2 + g\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = 0, \quad s \geqq 0 \tag{23}$$

と書きかえ(ただし$\lambda \neq 1$の時)無限個のiに対して$\delta < v_i < 1$となることに注意すると

$$\int^{\infty} [\dot{v}(s)]^2 ds < \infty \tag{24}$$

および

$$\lim_{i \to \infty} \left(\frac{1}{2} v_i^2 - \frac{1}{1-\lambda} v_i^{1-\lambda}\right) \in \mathbb{R}$$

の存在がわかり、これと(21)より

$$0 < \delta \leqq v(s) \leqq M_0, \quad s \geqq 0, \tag{25}$$

となる$M_0 > 0$の存在がわかる。するとこれらともとの方程式(22)より

$$|\dot{v}(s)|, \ |\ddot{v}(s)| \leqq M_1, \quad s \geqq 0, \tag{26}$$

となる$M_1 > 0$の存在がわかり、更に(23)より

$$\lim_{i \to \infty} |\dot{v}(\sigma_i)| \in (0, \infty) \tag{27}$$

の存在がわかる。以上の(24)-(27)を用いるとBellman [1, 第7章]の論法より矛盾が得られる。

(ii) 方程式(14)について。(i)と全く同様の変換を行うと今度は

$$v''(t) - \frac{2\alpha}{1+\lambda} v'(t) + [v(t) - v^{-\lambda}(t)] = 0, \qquad t \geqq 1,$$

かつ

$$v(t) \geqq \delta > 0, \quad t \geqq 1 \quad (ある\ \delta > 0)$$

となる正値関数 $v(t)$ について考えることになるので全く同様である。

REFERENCES

[1] R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York (1953).
[21 A. J. Callegari and A. Nachman, Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory, J. Math. Anal. Appl., 64(1978), 96-105.
[3] T. Kusano and C. A. Swanson, Asymptotic properties of semilinear elliptic equations, Funkcial. Ekvac., 26(1983), 115-129.
[4] T. Kusano and C. A. Swanson, Asymptotic theory of singular semilinear elliptic equations, Canad. Math. Bull. 27(1984), 223-232.
[5] S. D. Taliaferro, On the positive solutions of $y'' + \phi(t)y^{-\lambda} = 0$, Nonlinear Anal., 2(1978), 437-446.
[6] H. Usami, On positive decaying solutions of singular Emden-Fowler type equations, Nonlinear Anal., to appear.